E.N.S.I. DE CHIMIE SUD option P 1979

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

1° *a.* Étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = (x-1) - \text{Log } x$.

b. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, tracer son graphe. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \geqslant 0$.

2° Discuter, en fonction de la valeur du nombre réel a, le nombre des racines de l'équation $F(x) = a$.

3° *Application numérique :* Soit α et β les racines de l'équation $F(x) = 1$, telles que $0 < \beta < 1 < \alpha$.

a. Calculant les premiers termes de la suite $\{x_n\}$ telle que : $x_0 = \pi$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \text{Log } x_{n-1} + 2$, trouver la valeur de α avec une erreur absolue inférieure à 5×10^{-4}.

b. Du calcul des premiers termes de la suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = e^{v_{n-1}} - 2$, déduire la valeur de Log β avec une erreur inférieure à 5.10^{-4}. Donner alors la valeur de β avec une erreur inférieure à 5.10^{-5}.

II

1° n étant un entier > 1, P est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ constitué par les n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que l'on ait pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $x_i \in]0, 1[$, et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

H est l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ Log } \frac{1}{x_i}.$$

a. Utilisant un résultat du I. 1°, montrer que pour tout

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P,$$

la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ Log } \frac{1}{n x_i}$ est négative ou nulle.

b. Exprimer cette somme en fonction de $H(x)$.

c. En déduire que l'application H présente un maximum absolu lorsque x parcourt P, et que ce maximum est atteint pour une valeur unique de x que l'on précisera.

2° M est l'ensemble des n-uplets $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers naturels > 0 tels que $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_k} \leqslant 1$.

Du calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$, déduire que M n'est pas vide, et qu'il existe au moins un élément $m = (m_1, \ldots, m_n)$ de M tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_k} = 1.$$

3° Soit s l'application de $P \times M$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P$, et pour tout $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M$ on ait :

$$s(x, m) = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

Utilisant un résultat du I. 1°, étudier, pour tout $(x, m) \in P \times M$, le signe de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ Log } \frac{1}{2^{m_i} x_i}$$

En déduire que :

$$\forall (x, m) \in P \times M, \text{ on a : } s(x, m) \geqslant \frac{H(x)}{\text{Log } 2}$$

Démontrer que, pour tout $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_i} = 1,$$

.../...

il existe un élément x de P et un seul pour lequel $s(x, m) = \dfrac{H(x)}{\text{Log } 2}$; préciser la valeur de cet élément.

4° Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de P. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on désigne par α_i le nombre réel tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_i} = x_i$, et par ν_i le plus petit entier naturel tel que $\alpha_i \leqslant \nu_i$.

a. Exprimer $\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$ en fonction de $H(x)$.

b. Vérifier que $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in M$.

c. De l'étude de $s(x, \nu)$ déduire que, pour tout $x \in P$, il existe $m \in M$ tel que $s(x, m) < \dfrac{H(x)}{\text{Log } 2} + 1$.

5° Dans le cas particulier où $n = 6$ et où $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)$

a. Calculer $\dfrac{H(x)}{\text{Log } 2}$.

b. Donner les valeurs des nombres α_i et des nombres ν_i définis dans la question précédente.

c. Calculer $s(x, \nu)$ et vérifier que $s(x, \nu) < \dfrac{H(x)}{\text{Log } 2} + 1$.

d. Vérifier que $m = (2, 2, 2, 3, 4, 4) \in M$; calculer $s(x, m)$, et en déduire que ν n'est pas un élément de M qui corresponde au minimum absolu de s.

III

φ étant une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, si les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\, dt$ et $\int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ sont absolument convergentes, on dira que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est absolument convergente et qu'elle a pour valeur la somme des deux précédentes.

1° A tout $r > 0$, on associe l'ensemble D_r des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, et l'ensemble K_r des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sup(|x|, |y|) \leqslant r$, puis les intégrales doubles :

$$I(r) = \iint_{D_r} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\, dx\, dy \qquad \text{et} \qquad J(r) = \iint_{K_r} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, dx\, dy$$

a. Vérifier que $I(r) \leqslant J(r) \leqslant I(r\sqrt{2})$.

b. Calculer $I(r)$.

c. En déduire que, si r tend vers l'infini, $J(r)$ a une limite que l'on précisera.

2° Montrer alors que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

est absolument convergente et donner sa valeur.

3° Soit un nombre réel $\sigma > 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

a. Quelle est la limite, pour $p \in \mathbb{N}^*$, de $x^p f(x)$ lorsque x tend vers l'infini?

b. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence absolue de l'intégrale

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx.$$

4° Calculer m_0 et m_1. Exprimer m_n en fonction de m_{n+2}. En déduire la valeur de m_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV

A tout réel $\sigma > 0$, on associe l'ensemble Δ_σ des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs > 0, intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, telles que :

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, g(x)\, dx = \sigma^2$

. . . / . . .

c. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \operatorname{Log} \frac{1}{g(x)}\, dx$ soit absolument convergente.

1° Montrer, en utilisant les résultats du III, que Δ_σ n'est pas vide.

2° Vérifier que la fonction $\varphi : x \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x|}$ appartient à Δ_σ.

3° f étant la fonction définie au III. 3°, étudier, pour tout $g \in \Delta_\sigma$, la convergence de l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \operatorname{Log} \frac{1}{f(x)}\, dx$$

et donner sa valeur si elle converge.

4° $\mathcal{H}$ est l'application de Δ_σ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{H}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \operatorname{Log} \frac{1}{g(x)}\, dx.$$

Donner les valeurs de $\mathcal{H}(f)$ et $\mathcal{H}(\varphi)$; vérifier que $\mathcal{H}(\varphi) \leqslant \mathcal{H}(f)$.

5° Démontrer que $\forall g \in \Delta_\sigma$, $\mathcal{H}(g) \leqslant \mathcal{H}(f)$.

En déduire l'existence d'un maximum absolu de l'application $\mathcal{H}$ lorsque g parcourt Δ_σ, ainsi que la valeur de ce maximum.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail